

Khôlles de Maths en HX3

Antoine Goudey

2024-2025

1 Semaine 01 (23/09/2024 - 27/09/2024)

Exercice 1.1 Exercice proposé par *Mme Tosel* pour *Antoine G.* le 25/09/2024.

Calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}$$

Exercice 1.2 Exercice proposé par *Mme Tosel* pour *Antoine G.* le 25/09/2024.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On écrit n sous la forme : $n = \sum_{i=1}^k a_i$, $a_i \in \mathbb{N}^*$. Maximiser le produit : $\prod_{i=1}^k a_i$

Exercice 1.3 Exercice proposé par *Mme Tosel* pour *Antoine G.* le 25/09/2024.

Soit M un ensemble, tel que $\text{Card}(M) \geq 2$, et pour tout $a, b \in M$, $\sqrt{ab} \in M$. Prouver que $M \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense dans $[\inf(M), \sup(M)]$

2 Semaine 02 (30/09/2024 - 04/09/2024)

Exercice 2.1 Exercice proposé par *M. Duchemein* pour *Antoine G.* le 01/10/2024.

Caractériser avec une équation sur f , le fait que f admet un axe de symétrie axiale, et un point de symétrie centrale.

Exercice 2.2 Exercice proposé par *M. Duchemein* pour *Antoine G.* le 01/10/2024.

Montrer que $\left\{ \frac{k}{2^n}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2.3 Exercice proposé par *M. Duchemein* pour *Antoine G.* le 01/10/2024.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^*, (z+1)f(x+y) = f(xf(z)+y) + f(yf(z)+x)$$

3 Semaine 03 (07/10/2024 - 11/10/2024)

Exercice 3.1 Exercice proposé par *M. Spriano* pour *Antoine G.* le 09/10/2024.

Soit f continue et dérivable en 0. Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

4 Semaine 04 (14/10/2024 - 18/10/2024)

Exercice 4.1 Exercice proposé par *M. Destagnol* pour *Antoine G.* le 16/10/2024.
Déterminer une primitive de $x \mapsto \sin(\ln(x))$

Exercice 4.2 Exercice proposé par *M. Destagnol* pour *Antoine G.* le 16/10/2024.
Calculer :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{3 + \sin(x)}$$

Exercice 4.3 Exercice proposé par *M. Destagnol* pour *Antoine G.* le 16/10/2024.
Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n dx$$

5 Semaine 05 (21/10/2024 - 25/10/2024)

Exo HP de colle, infaisable (Mme Elbaz)

6 Semaine 06 (28/10/2024 - 01/11/2024)

Exercice 6.1 Exercice proposé par *M. Tosel* pour *Antoine G.* le 13/11/2024.

1. Prouver le lemme de Thue : Si $a, n \in \mathbb{Z}$ avec $\text{pgcd}(a, n) = 1$, il existe u, v tels que $au \equiv v[n]$ et $0 < |u|, |v| < \sqrt{n}$
2. Soit p premier. Prouver que -1 est un carré mod p si et seulement si $p \equiv 1[4]$
3. Prouver que si $p \equiv 1[4]$ est premier, il existe $x, y \in \mathbb{Z}$, tels que $p = x^2 + y^2$

Exercice 6.2 Exercice proposé par *M. Tosel* pour *Antoine G.* le 13/11/2024.

On note $F_n = 2^{2^n} + 1$

1. Prouver que le nombre de nombres premiers qui divisent $\prod_{i=0}^{n-1} F_i$ est plus petit que 2^n
2. Prouver que $\text{Card}(\{p \in \mathbb{P}, p \leq x, \exists i \geq n, p \mid F_i\}) \leq \frac{x}{2^{n+1}}$
3. Prouver que $\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \text{Card}(\{p \in \mathbb{P}, p \leq x, \exists i \in \mathbb{N}, p \mid F_i\})$ est borné.

7 Semaine 07 (18/11/2024 - 22/11/2024)

Exercice 7.1 Exercice proposé par *M. Marteil* pour *Antoine G.* le 22/11/2024.

Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. Soit M :

$$M = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} x$$

Montrer que $M^2 = M$

Exercice 7.2 Exercice proposé par *M. Marteil* pour *Antoine G.* le 22/11/2024.

On définit sur $P(\mathbb{N})$ la relation :

$$A \sim B \iff A \setminus \llbracket 0; n \rrbracket = B \setminus \llbracket 0; n \rrbracket$$

1. Montrer que c'est une relation d'équivalence

2. Identifier $\bar{\emptyset}$, $\bar{\mathbb{N}}$
3. Trouver une famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de partie de $\mathbb{N}$, tel que si $i \neq j$, $A_i \not\sim A_j$
4. Même question avec $(A_i)_{i \in P(\mathbb{N})}$

Exercice 7.3 Exercice proposé par *M. Marteil* pour *Antoine G.* le 22/11/2024.

Soit p premier. On définit sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ la relation d'équivalences : $x \sim y \iff x^2 = y^2$. Combien y'a-t-il de classes d'équivalences ?

Exercice 7.4 Exercice proposé par *M. Marteil* pour *Antoine G.* le 22/11/2024.

Soit f un morphisme : $G \rightarrow H$. Montrer que l'ordre de $f(g)$ divise l'ordre de g .

8 Semaine 08 (25/11/2024 - 29/11/2024)

Exercice 8.1 Exercice proposé par *M. Daniel* pour *Antoine G.* le 29/11/2024.

Soit $\mathbb{K}$ le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$, tel que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$, $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{K}$. Identifier le plus simplement possible les éléments de $\mathbb{K}$. Trouver tous le sous-corps de $\mathbb{K}$.

Exercice 8.2 Exercice proposé par *M. Daniel* pour *Antoine G.* le 29/11/2024.

Soit $\alpha \geq 3$ un nombre impair.

- Montrer que $\alpha^{2^{\alpha-2}} \equiv 1[2^\alpha]$
- Trouver la structure de $(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^\times$

9 Semaine 09 (02/12/2024 - 06/12/2024)

Exercice 9.1 Exercice proposé par *M. Tosel* pour *Antoine G.* le 02/12/2024.

Soit (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et :

$$u_n = \begin{cases} 2u_{n-1} & \text{si } n \text{ est une puissance de 2} \\ \lceil \frac{u_{n-1}}{3} \rceil & \text{si } n \text{ est une puissance de 3} \\ u_{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que (u_n) diverge.

Exercice 9.2 Exercice proposé par *M. Tosel* pour *Antoine G.* le 02/12/2024.

Soit (u_n) définie par : $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et :

$$u_{n+2} = |u_{n+1} - u_n|$$

À quelle condition (u_n) converge ?

10 Semaine 10 (09/12/2024 - 13/12/2024)

Exercice 10.1 Exercice proposé par *M. Roussillon* pour *Antoine G.* le 12/12/2024.

Trouver toutes les suites (u_n) telles que :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$$

Exercice 10.2 Exercice proposé par *M. Roussillon* pour *Antoine G.* le 12/12/2024.

Soit f une fonction continue.

1. On suppose f injective sur les irrationnels ($f|_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ est injective). Montrer que f est injective.
2. On suppose ensuite f injective sur les rationnels. Est-elle injective sur $\mathbb{R}$?

11 Semaine 11 (16/12/2024 - 20/12/2024)

Exercice 11.1 Exercice proposé par *M. Raclot* pour *Antoine G.* le 16/12/2024.

Soit f continue à droite. Prouver que le nombre de points de discontinuité de f est dénombrable.

12 Semaine 12 (06/01/2025 - 10/01/2025)

Exercice 12.1 Exercice proposé par *M. Ben Nejma* pour *Antoine G.* le 06/01/2025.

Trouver toutes les fonctions $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{cases} D(f+g) &= D(f) + D(g) \\ D(fg) &= D(f)g + fD(g) \\ D(x \mapsto \lambda) &= 0 \end{cases}$$

Exercice 12.2 Exercice proposé par *M. Ben Nejma* pour *Antoine G.* le 06/01/2025.

Soit $M : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{cases} M : f \mapsto id \times f \\ D : f \mapsto f' \end{cases}$$

Trouver toutes les fonctions $\Phi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{cases} \Phi \circ D = D \circ \Phi \\ \Phi \circ M = M \circ \Phi \\ \Phi(f + \lambda g) = \Phi(f) + \lambda \Phi(g) \end{cases}$$

13 Semaine 13 (13/01/2025 - 17/01/2025)

Exercice 13.1 Exercice proposé par *Mme Elbaz* pour *Antoine G.* le 15/01/2025.

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ défini par :

$$P(X) = \prod_{i=1}^n (X - a_i) - 1$$

Prouver que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$

Exercice 13.2 Exercice proposé par *Mme Elbaz* pour *Antoine G.* le 15/01/2025.

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que l'ensemble $\{p \in \mathbb{P}, \exists n \in \mathbb{Z}, p \mid P(n)\}$ est infini.

14 Semaine 14 (20/01/2025 - 24/01/2025)

Exercice 14.1 Exercice proposé par *M. Roussillon* pour *Antoine G.* le 23/01/2025.

Soit $C > 1$ un réel. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [\frac{1}{C}; C]^{\mathbb{N}}$. On pose :

$$P_n = \sum_{k=1}^n a_k X^k$$

On écrit aussi :

$$P_n = \prod_{k=1}^n (X - x_{k,n})$$

où les $x_{k,n}$ sont des complexes.

1. Montrer que l'ensemble $\{x_{k,n} \mid n \in \mathbb{N}, k \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ est borné (en module)

2. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n x_{k,n}^2 = \frac{a_{n-1}^2 - a_n a_{n-2}}{a_n^2}$$

3. Montrer que P_n n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$

15 Semaine 15 (27/01/2025 - 31/01/2025)

Exercice 15.1 Exercice proposé par *M. Duchemin* pour *Antoine G.* le 31/01/2025.

Déterminer le nombre de directions de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ en tant que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espace vectoriel.

Exercice 15.2 Exercice proposé par *M. Duchemin* pour *Antoine G.* le 31/01/2025.

Soit G un groupe fini, tel que pour tout $g \in G$, $g^2 = e$. Montrer que le cardinal de G est une puissance de 2.

Exercice 15.3 Exercice proposé par *M. Duchemin* pour *Antoine G.* le 31/01/2025.

Soit une grille carrée de taille $n \times n$. Sur chaque case il peut y avoir ou non un interrupteur. Au bout de chaque ligne, il y a une lampe. On peut utiliser tous les interrupteurs sur une même colonne en même temps. Si un interrupteur est utilisé, la lampe au bout de la ligne change d'état (elle s'allume si elle était éteinte et inversement). On part d'une configuration initiale quelconque des lampes et de la grille. Au début du jeu, on peut modifier au plus k cases (c'est à dire mettre un interrupteur sur une case vide, ou en enlever un). Quel est le plus petit k tel que l'on peut être sûr d'allumer toutes les lampes ?

16 Semaine 16 (03/02/2025 - 07/02/2025)

Exercice 16.1 Exercice proposé par *M. Gloess* pour *Antoine G.* le 04/02/2025.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces de même dimension. Montrer que l'on peut trouver un supplémentaire commun à F et à G .

Exercice 16.2 Exercice proposé par *M. Gloess* pour *Antoine G.* le 04/02/2025.

Soit E un espace vectoriel de dimension n . Soit ϕ un endomorphisme tel que $\phi^n = 0$. Trouver une base de $C(\phi)$, le commutant de ϕ .

17 Semaine 17 (10/02/2025 - 14/02/2025)

Exercice 17.1 Exercice proposé par *Mme Elbaz* pour *Antoine G.* le 31/01/2025.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit A l'ensemble des sous-espaces de E . Trouver toutes les fonctions $f : A \rightarrow E$ telles que :

$$\forall U, V \in A : f(U + V) = f(U) + f(V) - f(U \cap V)$$

Exercice 17.2 Exercice proposé par *Mme Elbaz* pour *Antoine G.* le 31/01/2025.

Trouver tous les idéaux à gauche de $\mathcal{L}(E)$

Exercice 17.3 Exercice proposé par *Mme Elbaz* pour *Antoine G.* le 31/01/2025.

Soit $f_1, \dots, f_n, f \in E^*$ telles que $\bigcap \ker f_i = \ker f$. Montrer que f est combinaison linéaire des f_i

Exercice 17.4 Exercice proposé par *Mme Elbaz* pour *Antoine G.* le 31/01/2025.

Soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$, F un sous-espace vectoriel de E , stable par tous les éléments de G . Montrer qu'il existe H un supplémentaire de F stable par tous les éléments de G .

Un autre exo, HP de colle avec de la topologie

18 Semaine 18 (03/03/2025 - 07/03/2025)

Exercice 18.1 Exercice proposé par *M. Duchemin* pour *04/03/2025* le *Antoine G.*.

On suppose que f admet un développement limité à tout ordre, et que $f(0) = 0$. Quel est le DL de $\frac{1}{1+f(x)}$ (en fonction du DL de f). Que se passe-t-il si tous les coefficients du DL de f sont égaux à 1.

Exercice 18.2 Exercice proposé par *M. Duchemin* pour *04/03/2025* le *Antoine G.*.

Trouver la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(x-a)^3(x-b)}$ à l'aide d'un DL.

19 Semaine 19 (10/03/2025 - 14/03/2025)

Exercice 19.1 Exercice proposé par *M. Spriano* pour *Antoine G.* le *13/03/2025*.

On pose $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Montrer que $u_{1000} \in [45; 45, 1]$

20 Semaine 20 (17/03/2025 - 21/03/2025)

Exercice 20.1 Exercice proposé par *M. Destagnol* pour *Antoine G.* le *20/03/2025*.

Déterminer la région des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que la série $\sum \frac{x^n}{n + y^n}$ converge.

Exercice 20.2 Exercice proposé par *M. Destagnol* pour *Antoine G.* le *20/03/2025*.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{a}{n} + O(\frac{1}{n^2})}$$

Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ (en fonction de $a \in \mathbb{R}$).

Si u_n vérifie $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$, quelles sont les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ telles que la série $\sum u_n$ converge ? Dans ce cas, quelle est la valeur de la limite ?

21 Semaine 21 (24/03/2025 - 28/03/2025)

Exercice 21.1 Exercice proposé par *Mme Tosel* pour *Antoine G.* le *28/03/2025*.

Trouver tous les $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ tels que $\left\{ \int_0^1 f^n, n \in \mathbb{N} \right\}$ prend un nombre fini de valeurs

Exercice 21.2 Exercice proposé par *Mme Tosel* pour *Antoine G.* le *28/03/2025*.

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in]0; 1[^{\mathbb{N}^*}$ pour que :

$$\forall x \in]0; 1[, \exists \sigma \in S(\mathbb{N}^*), \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{\sigma(k)}}{2^k} = x$$

22 Semaine 22 (31/03/2025 - 04/04/2025)

Exercice 22.1 Exercice proposé par *M. Roussillon* pour *Antoine G.* le *03/04/2025*.

Soit E un espace vectoriel de dimension n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ v \mapsto u \circ v \end{cases}$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme d'espace vectoriel
2. Montrer que toute valeur propre de ϕ est valeur propre de u
3. Montrer que toute valeur propre de u est valeur propre de ϕ
4. Soit λ une valeur propre de ϕ . Montrer que $v \in \text{Ker}(\phi - \lambda \text{id}) \iff \text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u - \lambda \text{id})$

5. Trouver $\dim(\text{Ker}(\phi - \lambda \text{id}))$
6. Montrer que ϕ est diagonalisable si et seulement si u l'est

Exercice 22.2 Exercice proposé par *M. Roussillon* pour *Antoine G.* le 03/04/2025.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note :

$$E_n = \left\{ c \in \mathbb{R} \mid \forall f \in C^0([0; 1], \mathbb{R}_+), \int_0^1 f(t^{1/n}) dt \leq c \int_0^1 f(t) dt \right\}$$

Trouver $\inf(E_n)$.

23 Semaine 23 (07/04/2025 - 11/04/2025)

Exercice 23.1 Exercice proposé par *M. Brugnerotto* pour *Antoine G.* le 10/04/2025.
Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont toutes les matrices sont de rang inférieur à r . Montrer que $\dim(V) \leq nr$

24 Semaine 24 (28/04/2025 - 02/05/2025)

Exercice 24.1 Exercice proposé par *M. Daniel* pour *Antoine G.* le 30/04/2025.
Quelle est le déterminant de la matrice ci-dessous ?

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & a & a & a & \dots & a \\ b & \alpha_2 & a & a & \dots & a \\ b & b & \alpha_3 & a & \dots & a \\ b & b & b & \alpha_4 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ b & b & b & b & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Exercice 24.2 Exercice proposé par *M. Daniel* pour *Antoine G.* le 30/04/2025.

Soit $\phi_u : \begin{cases} \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \\ \lambda \mapsto \det(u + \lambda v) \end{cases}$

1. Montrer que ϕ_u est polynomiale en λ
2. Majorer le degré du polynôme en fonction de v
3. À quelle condition sur u cette inégalité est-elle une égalité ?

25 Semaine 26 (12/05/2025 - 16/05/2025)

Exercice 25.1 Exercice proposé par *M. Raclot* pour *Antoine G.* le 12/05/2025.
Quelle est le nombre minimal de transpositions engendrant S_n ?

Exercice 25.2 Exercice proposé par *M. Brugnerotto* pour *Antoine G.* le 16/05/2025.
Soit $\mathcal{A}_n$ le sous-groupe de S_n des permutations de signature 1.

1. Montrer que les 3-cycles engendrent $\mathcal{A}_n$
2. Montrer que les 3-cycles sont conjugués dans $\mathcal{A}_n$
3. Montrer que pour $n \geq 5$, tout sous-groupe de $\mathcal{A}_n$ stable par conjugaison est soit $\{\text{id}\}$, soit $\mathcal{A}_n$.

26 Semaine 27 (19/05/2025 - 23/05/2025)

Colle à rattraper avec Mme Elbaz

27 Semaine 28 (02/06/2025 - 06/06/2025)

Exercice 27.1 Exercice proposé par *M. Ben Nejma* pour *Antoine G.* le 02/06/2025.

Soit G un graphe aléatoire, avec une probabilité p , que deux arêtes soient reliées de façon indépendante.

- Quel est la loi de la variable aléatoire donnant le degré d'un sommet ?
- Quel est l'espérance de la variable aléatoire donnant le nombre de triangle dans le graphe ? La variance de cette loi ?

Exercice 27.2 Exercice proposé par *M. Ben Nejma* pour *Antoine G.* le 02/06/2025.

Est-il possible d'avoir une variable aléatoire X , telle que pour tout q premier, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $P(q^r \mid X) = \frac{1}{q^r}$?